# Podziały zbiorów.

## Zasada szufladkowa Dirichleta.

Zasada ta mówi, ze jeżeli $m$ przedmiotów włożymy do $n$ róznych szufladek i $m > n$ , to co najmniej w jednej szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty.

W bardziej sformalizowanej postaci:

Jeżeli zbiór $X$ liczy $n$ elementów i
$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots \cup X_m$ i $n > m$ , to któryś ze zbiorów $X_i$ musi liczyć co najmniej dwa elementy.
Istotnie, gdyby w każdej szufladce był tylko jeden przedmiot to w sumie by ich było tylko $m$, a nie $n > m$.

W książce Matematyka Konkretna (R.L.Graham,.D.E.Knuth, O.Patashnik) twierdzenie to zostało podane w mocniejszej wersji:

Jeżeli wkładamy do $m$ pudełek $n$ przedmiotów, to wtedy pewne pudełko zawiera co najmniej $\lceil n / m \rceil$ przedmiotów i pewne pudełko zawiera ich co najwyżej $\lfloor n / m \rfloor$.

## Zastosowania zasady szufladkowej.

Ta wydawałoby się oczywista zasada ma wiele zaskakująco różnych zastosowań. Pokażemy kilka z nich .

***Przykład* 1.**

Wśród 20 osób muszą być przynajmniej dwie urodzone w tym samym miesiącu. Dowód oczywisty.

***Przykład* 2**

Wśród ($n$ +1) liczb całkowitych zawsze można znaleźć dwie, których różnica jest podzielna przez $n$.
Dowód:
Reszty z dzielenia przez $n$ to zbiór liczb: 0, 1, ..., $n$-1. Zbiór ten liczy $n$ różnych wartości. Jeżeli liczb jest więcej niż $n$ to co najmniej dwie z nich muszą mieć tę samą resztę z dzielenia przez $n$, a stąd ich różnica musi być podzielna przez $n$.



***Przykład* 3.** (Jarosław Górnicki *Matematyka* 5/1999)

Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ istnieje jej wielokrotność, którą w systemie dziesiętnym możemy zapisać przy pomocy jedynie cyfr 0 i 1.

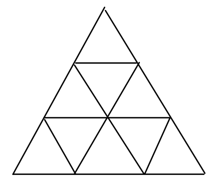
<u>*Dowód:*</u>

Korzystamy z rozwiązania poprzedniego przykładu. Wśród $n$+1 liczb muszą być co najmniej dwie dające tę samą resztę z dzielenia przez n.
Tworzymy ciąg $n$+1 liczb:
1, 11, 111, 1111 , ... , 11..111
Ostatnia liczba jest przedstawiona za pomocą ($n$+1) jedynek. Wśród podanych liczb muszą być dwie dające tę samą resztę z dzielenia przez $n$. Odejmując te liczby otrzymujemy liczbę o podanej własności.
W przypadku $n = 4$ mamy ciąg liczb
1, 11, 111, 1111, 11111,
których reszty z dzielenia przez 4 to: 1, 3, 3, 3, 3.
Liczba spełniająca podaną własność to np. 111-11 = 100 ale też i 1111-11=1100 i jeszcze kilka innych.

***Przykład* 4.**

Udowodnić, ze w trójkącie równobocznym o boku 3 nie można umieścić 10 punktów w taki sposób, by każde dwa były odległe od siebie o więcej niż 1.

<u>*Dowód:*</u>



Jest oczywiste, ze w trójkącie równobocznym o boku 1 nie można umieścić dwóch punktów w odległości większej niż 1.
Nasz trójkąt dzielimy na 9 przystających trójkątów równobocznych (rys.), bok każdego z nich ma długość 1.
Umieszczając 10 punktów w 9 małych trójkątach musimy przynajmniej jedną parę punktów umieścić w jednym trójkącie, tym samym odległość między tymi punktami nie może przekroczyć 1.

***Przykład* 5.**

Pokazać, że , że wśród kolejnych potęg liczby 7:

$$7,\quad 7^2,\quad 7^3,\quad 7^4, \ldots$$

istnieje taka, której zapis dziesiętny kończy się na 001.

<u>*Dowód:*</u>

Tworzymy ciąg 1000 liczb: $7,\ 7^2,\ 7^3,\ \ldots,\ 7^{1000}$.

Żadna z tych liczb nie jest podzielna przez 1000, więc reszty z dzielenia przez 1000 mogą przyjmować wartości z przedziału [1, 999] , czyli co najwyżej 999 wartości. To znaczy, że w utworzonym ciągu znajdują się dwie liczby dające tę samą resztę z dzielenia przez 1000. Istnieją więc takie liczby $k$ i $m$ że

$$7^k \equiv 7^m \mod 1000 .$$

Niech przy tym będzie $k > m$. Wtedy

$$7^k - 7^m \mod 1000 = 0 ,$$

czyli

$$7^m (7^{k-m} - 1) \mod 1000 = 0.$$

Ponieważ liczba $7^m$ nie jest podzielna przez 1000, więc

$$(7^{k-m} - 1) \mod 1000 = 0,$$

a stąd

$$7^{k-m} \mod 1000 = 1,$$

czyli ostatnie cyfry tej liczby to 001, a liczba ta jest potęgą 7. To kończy dowód.

## Liczby Stirlinga

Wyróżniamy dwa rodzaje liczb Stirlinga:
- liczby Stirlinga I rodzaju - są ona związane z liczbą cykli
- liczby Stirlinga II rodzaju - związane z liczbami podziałów zbioru

Dokładniej omówione tu zostaną jedynie liczby Stirlinga II rodzaju, które występują częściej niż liczby I rodzaju.



## Liczby Stirlinga II rodzaju.

Liczby Stirlinga II rodzaju, oznaczane przez S($n$, $k$) określają liczbę podziałów zbioru $n$- elementowego na k niepustych i rozłącznych podzbiorów. Przy tym kolejność podzbiorów nie jest istotna.
Liczby te zapisuje się też w formie

$$S(n,k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

***Przykład.***
Obliczyć:
a) $S(4, 2)$ b) $S(4, 3)$ c) $S(5, 2)$ d) $S(5,3)$

<u>Rozwiązanie</u>

a) Obliczamy $S(4, 2)$.
Zbiór 4 elementowy podzielić na sumę $S = S_1 \cup S_2$.
Możliwe przypadki: I. 4=1+3, II. 4 = 2+2

I. Zbiór $S_1$ można utworzyć na 4 sposoby (czyli wybrać 1 element spośród 4), pozostałe elementy tworzą zbiór $S_2$. Są więc 4 przypadki podziału 1+3.

II. Zbiór $S_1$ ma 2 elementy, które wybieramy spośród 4. Można to zrobić na $C_4^2 = 4!/(2!*2!) = 6$ sposobów. Pozostałe 2 elementy należą do zbioru $S_2$. Jednak każdy podział jest powtórzony 2 razy – ta sama para raz jest wybrana do zbioru $S_1$ a drugi raz do zbioru $S_2$ jako para elementów, która nie wchodzi do $S_1$. Stąd otrzymujemy 3 możliwości podziału zbioru 4- elementowego na 2 podzbiory po 2 elementy.

Łącznie jest więc 4+3 = 7 możliwości podziału zbioru 4 elementowego na 2 niepuste podzbiory, czyli $S(4, 2) = 7$.

b) Obliczamy $S(4, 3)$. Zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta, jeden z podzbiorów musi liczyć co najmniej 2 elementy. Z drugiej strony podzbiór ten nie może liczyć więcej elementów, bo żaden z trzech podzbiorów nie może być pusty. Stąd, jedyny możliwy podział to 2+1+1, co można zrobić na $C_4^2 \cdot 1 \cdot 1 = 4!\,(2! \cdot 2!) = 6$ sposobów. A więc $S(4, 3) = 6$.

c) $S(5, 2)$. Możliwe podziały: 1+4, 2+3 (3+2 i 4+1 są powtórzeniami podanych, bo kolejność występowania podzbiorów nie jest ważna).

Podziałów 1+4 jest 5, tyle ile możliwości wyboru 1 elementu z 5.

Podziałów 2+3 jest tyle, ile kombinacji 5 po 2 , czyli 5·4·3/3! = 10. Stąd $S(5, 2) = 15$.

d) $S(5, 3)$. Możliwe podziały : 1+1+3, 1+2+2 .

W pierwszym przypadku $C_5^3 = 10$ możliwości – (zbiór 3 elem.).

W drugim przypadku (podział 1+2+2) mamy 5 sposobów wyboru pojedynczego elementu. Pozostałe 4 elementy dzielimy na 2 zbiory dwuelementowe - można to zrobić $(1/2)\cdot C_4^2 = 6/2 = 3$ sposoby.

Razem dla podziału 1+2+2 mamy 5·6/2=15 możliwości.

Łącznie dla obu przypadków mamy 10+ 15 = 25 możliwości, czyli S(5,3) = 25.

*koniec przykładu*

Liczby Stirlinga II rodzaju spełniają ***zależności rekurencyjne***

$$\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1 \quad \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1 \quad \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$$

Tabela. Liczby Stirlinga II rodzaju S(*n*, *k*)

| | | k | | | | | | | | | suma |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | (l. Bella) |
| | 0 | 1 | | | | | | | | | 1 |
| | 1 | 0 | 1 | | | | | | | | 1 |
| | 2 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | 2 |
| n | 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | | | | | 5 |
| | 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | | 15 |
| | 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | | 52 |
| | 6 | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | | 203 |
| | 7 | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | | 877 |
| | 8 | 0 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 | 4140 |



Uzasadnienie wzoru rekurencyjnego.

Dwie pierwsze równości, $S(n,1) = 1$ i $S(n, n) = 1$ są oczywiste.
Zajmiemy się wykazaniem słuszności wzoru
$S(n,k) = k\cdot S(n-1,k) + S(n-1,k-1)$.

Przy ustalonym podziale zbioru *n* elementowego na *k* podzbiorów usuwamy jeden element podzbioru. Mamy dwa przypadki:
a) usunięty element tworzył podzbiór 1- elementowy
b) usunięty element należał do liczniejszego podzbioru

W przypadku a) pozostałe *n*-1 elementów tworzą *k*-1 podzbiorów, co można zrobić na $S(n-1,k-1)$ sposobów.
W przypadku b) otrzymujemy podział zbioru *n*-1 elementowego na k podzbiorów, co daje $S(n-1,k)$ możliwości.
Teraz usunięty element można dołączyć kolejno do każdego podzbioru – otrzymujemy $k\cdot S(n-1,k)$ możliwości.
Sumując wyniki z p. a i z p. b otrzymujemy wzór rekurencyjny

$$S(n,k) = k\cdot S(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

*Koniec uzasadnienia.*

**Liczby Stirlinga I rodzaju.**

Liczby te określają liczbę rozmieszczeń *n* elementów w *k* cyklach i są oznaczane symbolem *s* (*n, k*). Stosuje się także oznaczenie

$$s(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

i nazywa się krótko: *k* cykli *n* .

Dla liczb Stirlinga I rodzaju mamy ***zależności rekurencyjne***:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Powyższe zależności pozwalają utworzyć tabelę wartości tych liczb.